



GRUNDPRAKTIKUM

O8: Fraunhofersche Beugung

Autor:



Partner:



Versuchsdatum: 

Versuchsplatz: 

Abgabedatum: 

Inhaltsverzeichnis

1	Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	2
2	Bestimmung der Laserwellenlänge	2
3	Ausmessen der Spaltbreite	4
4	Auflösungsvermögen und Beugung	5
5	Qualitative Untersuchungen an der Lochblende	6
6	Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung	9
A	Anhang	11

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch O8: Fraunhofersche Beugung erlaubt es, Beugungsphänomene an einigen optischen Strukturen zu beobachten und mit Hilfe der aus der Theorie abgeleiteten Formeln einige charakteristische Größen des Versuchsaufbaus zu berechnen. Daneben kann im Rahmen von O8 qualitativ gezeigt werden, wie das Phänomen der Beugung das Auflösungsvermögen optischer Instrumente maßgeblich bestimmt.

Eine ausführliche Beschreibung der physikalischen Grundlagen, des Versuchsaufbaus sowie der genauen Aufgabenstellungen befindet sich im Praktikumsskript [2, S.71-76] und soll deswegen hier nicht wiederholt werden. Falls nicht anders notiert wurde der Versuch wie im Skript beschrieben aufgebaut und durchgeführt.

2 Bestimmung der Laserwellenlänge

Im ersten Teil des Versuches wurde mit Hilfe der Beugung am Strichgitter die Wellenlänge des eingesetzten Helium-Neon-Lasers experimentell bestimmt. Dabei gilt die Beziehung

$$\sin \alpha_k = k \cdot \frac{\lambda}{g} \quad (1)$$

wobei $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ die Ordnung der Maxima bezeichnet, $g = 10^{-5}m$ die im Skript gegebene Gitterkonstante und λ die zu bestimmende Wellenlänge ist. Der Winkel α_k errechnet sich geometrisch als

$$\alpha_k = \arctan \left(\frac{x}{d} \right) \quad (2)$$

mit d als dem Abstand zwischen Gitter und Schirm und $x = x(k)$ der seitlichen Auslenkung des jeweils betrachteten Maximums.

Im Experiment wurden Beugungsmaxima bis zur Ordnung $k = \pm 2$ auf dem Schirm beobachtet, wobei als x die Auslenkung von dem in den Nullpunkt gelegten Maximum 0. Ordnung notiert wurde. Zusätzlich wurde der Abstand d mit einem Zollstock vermessen. Dabei ergaben sich sowohl systematische als auch statistische Unsicherheiten für die einzelnen Werte, die wie folgt angenommen wurden: für die Messung von x musste ein Holzlineal abgelesen werden, was üblicherweise mit einer Genauigkeit von einem halben Skalenteil geschieht. Darüber hinaus musste aber auch die tatsächliche Lage des Maximums im Lichtfleck geschätzt werden. Beide Unsicherheiten wurden im Sinne einer Größtfehlerabschätzung absolut addiert zu einem Gesamtfehler von $u_x = 1 \text{ mm}$. Der systematische Fehler des Holzlineals von etwa $200\mu m + x \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ist also zu vernachlässigen. Das Ablesen des Zollstockes zur Bestimmung von $d = (177 \pm 1) \text{ cm}$ gestaltete sich aufgrund des physischen Versuchsaufbaus als schwierig: der Zollstock konnte nicht vollständig plan angelegt werden und die tatsächliche Lage von Schirm und Gitter musste am jeweiligen Sockel abgeschätzt werden. Aus diesem Grund wird die Unsicherheit von d hier und im weiteren Verlauf des Versuchs großzügig auf $u_d = 10 \text{ mm}$ abgeschätzt, was für die vorliegenden Aufgabenstellungen als hinreichend genau angenommen wurde (siehe Fehlerbetrachtung).

Nun konnte eine lineare Regression mit der Funktion $f(k) = a \cdot k$ gemäß dem Zusammenhang

$$g \cdot \sin(\alpha_k) = \lambda \cdot k \quad (3)$$

durchgeführt werden, die gesuchte Wellenlänge ergibt sich also direkt aus dem Anstieg a der Regression. Zum Einsatz kam *OriginPro 8.6*, wobei die Regressionswerte mit der nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmten Unsicherheit

$$u_{f(k)} = \sqrt{\left(\frac{d \cdot g \cdot u_x}{(d^2 + x^2) \sqrt{(x/d)^2 + 1}} \right)^2 + \left(\frac{-x \cdot g \cdot u_d}{(d^2 + x^2) \sqrt{(x/d)^2 + 1}} \right)^2}$$

mit Hilfe von Origins *Instrumental-Methode* gewichtet wurden.

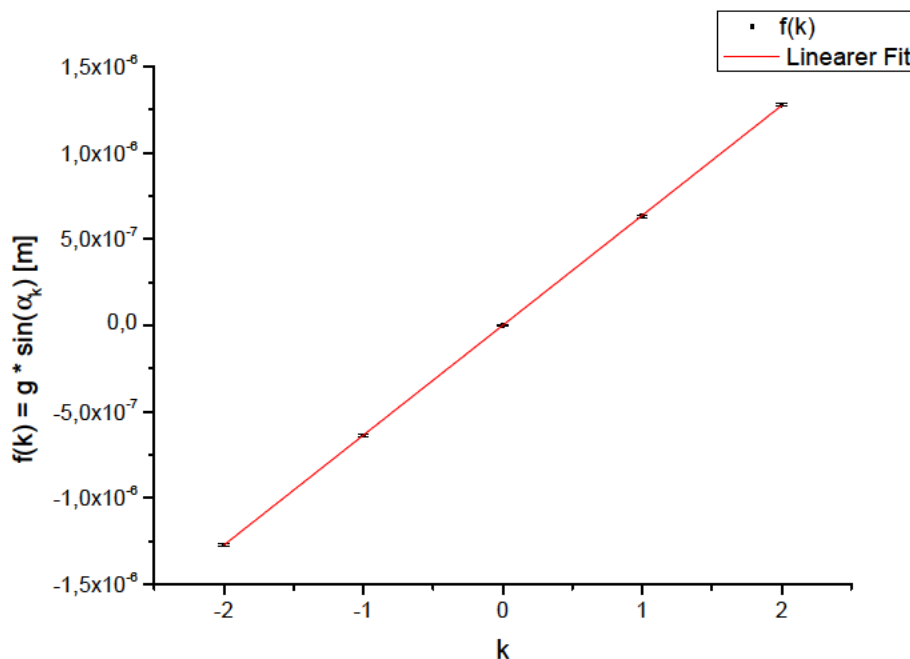


Abbildung 1: Linearer Fit zur Bestimmung von λ aus dem Anstieg

Aus dem Anstieg der Regressionsgeraden konnte somit die Wellenlänge λ des verwendeten Lasers wie folgt bestimmt werden:

$$\lambda = (636,4 \pm 1,2) \text{ nm} \quad (4)$$

Die für die Regression verwendeten Werte befinden sich im Anhang.

3 Ausmessen der Spaltbreite

Im nächsten Teil des Versuchs sollte die Beugung an einem Spalt dazu verwendet werden, die Breite b dieses Spaltes zu bestimmen. Dazu wurde auf die soeben bestimmte Wellenlänge des Lasers zurückgegriffen

$$\sin \alpha_k = k \cdot \frac{\lambda}{b} \quad (5)$$

wobei $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ wieder die Ordnung der Maxima bezeichnet und sich der Winkel α_k wie oben beschrieben berechnet.

In diesem Teilversuch wurden statt der Maxima die Beugungsminima betrachtet, deren gute Ablesbarkeit eine Messung bis in die Ordnung $k = \pm 9$ erlaubte. Die Auslenkungen x sowie der Abstand d wurden wie oben beschrieben gemessen und die entsprechenden Fehler abgeschätzt. Die lineare Regression wurde dann gemäß der Beziehung

$$\frac{\lambda}{\sin(\alpha_k)} = b \cdot \frac{1}{k} \quad (6)$$

durchgeführt, die Spaltbreite b ergibt sich also wieder aus dem Anstieg a der Regressionsfunktion $f(k) = a \cdot k^{-1}$. Die Gewichtung erfolgte hier erneut nach der *Instrumental-Methode* mit

$$u_{f(k)} = \sqrt{\left(\frac{d \lambda u_x}{x^2 \sqrt{(x/d)^2 + 1}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda u_d}{x^2 \sqrt{(x/d)^2 + 1}}\right)^2 + \left(\frac{d}{x} \sqrt{(x/d)^2 + 1} u_\lambda\right)^2}$$

als Gewichtungsfaktor.

Aus dem Anstieg der Regressionsgeraden und dem dazugehörigen Fehler konnte also die Spaltbreite b gewonnen werden:

$$b = (205 \pm 3) \mu m \quad (7)$$

mit $R^2 = 0,996$ und $\chi^2 = 3,8$. Die für die Regression verwendeten Werte befinden sich im Anhang.

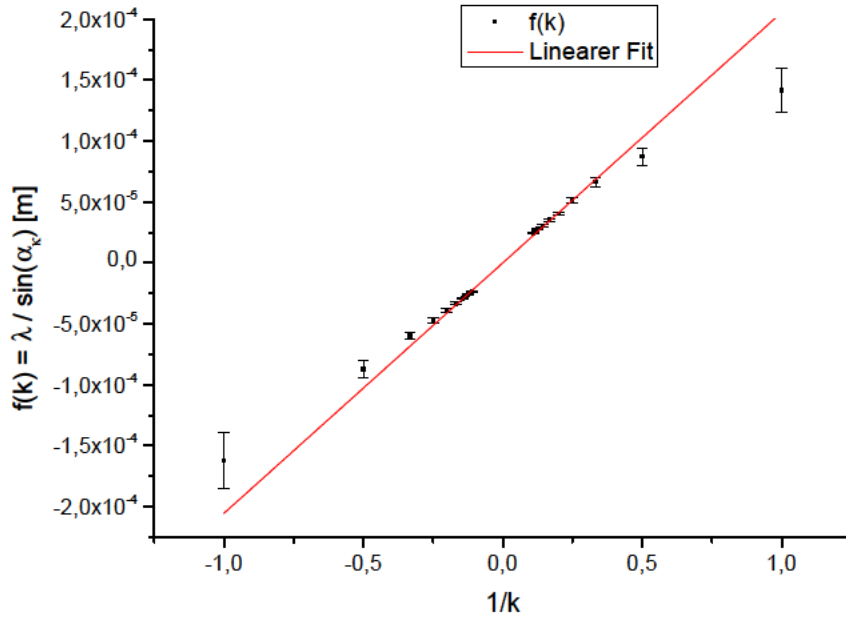


Abbildung 2: Linearer Fit zur Bestimmung von b aus dem Anstieg

4 Auflösungsvermögen und Beugung

Die Abbildungsleistung optischer Instrumente hängt wesentlich von den Beugungseigenschaften der verwendeten Komponenten ab. E. Abbé vermutete schon früh, zum Erreichen einer Abbildung seien zumindest zwei Beugungsordnungen notwendig. Um diese Vermutung zu überprüfen wurde das Modell eines Mikroskops auf dem optischen Tisch aufgebaut mit dem bereits verwendeten Gitter als abzubildendes Objekt. Es gilt dann bei Verwendung der ersten zwei Ordnungen

$$g_{\min} = \frac{\lambda}{n \cdot \sin \phi} \quad (8)$$

wobei $g_{\min}$ den minimal auflösbaren Spaltabstand am abzubildenden Gitter bezeichnet, ϕ der halbe Öffnungswinkel des Objektivs ist und n den Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv bezeichnet. Durch eine Veränderung der Blendenöffnungen kann also eine Änderung der numerischen Apertur $n \cdot \sin \phi$ des Objektivs simuliert werden. Wird der Winkel kleiner wächst der minimal auflösbare Spaltabstand $g_{\min}$. Um die Struktur des verwendeten Gitters mit der Gitterkonstante g noch abbilden zu können durfte $g_{\min}$ also nicht über 10^{-5} m steigen.

Um die Vermutung zu verifizieren wurde die vordere Blende, hinter der sich auch das Objektiv befand, schrittweise geöffnet und geschlossen. Die Beobachtungen sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Es wird deutlich, dass mindestens zwei Ordnungen zum Bild beitragen müssen, um die Struktur des Gitters erkennen zu können. Es ist dabei unerheblich, um welche Ordnungen es sich handelt, insbesondere muss die 0. Ordnung nicht enthalten sein - im Sinne eines gut ausgeleuchteten Beugungsbildes ist dies aber praktisch trotzdem

Tabelle 1: Abbildung einer Gitterstruktur im Mikroskop

Beitragende Ordnungen	Beobachtete Abbildung	Abbildungshelligkeit
alle	Struktur gut sichtbar	sehr hoch
0	Struktur nicht sichtbar	hoch
1	Struktur nicht sichtbar	sehr niedrig
0, 1	Struktur gut sichtbar	mittel
1, 2	Struktur sichtbar	niedrig
0, 1, 2	Struktur gut sichtbar	hoch
-1, 0, 1	Struktur gut sichtbar	hoch

erstrebenswert. Damit gilt die Abbé-Vermutung als bestätigt.

5 Qualitative Untersuchungen an der Lochblende

Im letzten Teil des Versuches sollte das Beugungsverhalten an einer Lochblende untersucht werden, bei der die Symmetrie des Problems auf zylindrische Besselfunktionen führt. Dazu wurde das Beugungsbild, das von einem eine Lochblende durchtretenden Laser erzeugt wird, ausgemessen und mit dem aus der Theorie abgeleiteten funktionalen Zusammenhang verglichen.

Gemäß der Vorgaben in der Versuchsbeschreibung wurden mit Hilfe einer Photozelle, die langsam durch die Minima und Maxima des Beugungsbildes bewegt wurde, ein Photostrom gemessen um Wertepaare von x , der seitlichen Auslenkung und I , der dort herrschenden Intensität aufzunehmen. Die Theorie sagt dann die folgende Intensitätsverteilung voraus:

$$I = I_0 \left[\frac{J_1(\Theta/2)}{\Theta/4} \right]^2 \quad (9)$$

wobei I_0 die maximale Intensität in der Mitte des 0. Beugungsmaximums bezeichnet und J_1 die zylindrische Besselfunktion 1. Ordnung ist. Der Winkel Θ bestimmt sich wie folgt:

$$\Theta = \frac{2\pi B \sin \alpha}{\lambda} \quad (10)$$

Hier bezeichnet B den Durchmesser der Lochblende und λ die Wellenlänge des Lasers. Der Beobachtungswinkel α ergibt sich wiederum geometrisch zu

$$\alpha = \arctan \left(\frac{x - x_0}{d} \right) \quad (11)$$

wobei x_0 die Lage des Intensitätsmaximums I_0 bezeichnet und $d = (150 \pm 1) \text{ cm}$ der Abstand von Lochblende zum Detektor ist. Der Wert von x beschreibt dann die seitliche Auslenkung der Messpunkte. Da die Messung nämlich nicht symmetrisch erfolgt muss statt der Auslenkung x tatsächlich die relative Auslenkung zum Hauptmaximum, also $x - x_0$ berücksichtigt werden.

Neben der bereits oben erläuterten konservativ abgeschätzten Unsicherheit für d müssen in den folgenden Rechnungen auch die Unsicherheiten der Lagemessung x sowie der Strommessungen berücksichtigt werden. Da die Lagemessung hier nicht mit einem Lineal sondern mit einer Art Bügelmessschraube vorgenommen wurde, gelten nun andere Fehlerintervalle als in den vorherigen Teilversuchen. Der systematische Fehler der Schraube selbst liegt bei etwa $u_{x,\text{syst}} = (5 \cdot 10^{-6} + x \cdot 10^{-5}) \text{ m}$, der Ablesefehler beträgt etwa einen halben Skalenteil, also $u_{x,\text{stat}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, beide Werte werden pythagoräisch für jede Messung zu u_x addiert. Für die Strommessung kam ein analoges Ampèremeter mit der Güteklasse 1,5 zum Einsatz. Die systematischen Unsicherheiten der Strommessung ergeben sich also aus $u_{I,\text{syst}} = (1,5\% \cdot \text{MBE}) A$, wozu noch der Ablesefehler der Skala, wiederum abgeschätzt mit einem halben Skalenteil, pythagoräisch zu u_I addiert werden muss.

Obwohl der Versuchsraum abgedunkelt war existierte ein messbarer Reststrom I_R , verursacht durch die verbleibende Hintergrundbeleuchtung, der von den gemessenen Stromwerten abgezogen werden muss. Um I_R zu bestimmen wurden bei vollständig verdecktem Laser sechs Messwerte mit dem Ampèremeter aufgenommen. Der Reststrom I_R ergibt sich dann aus dem Mittelwert dieser sechs Messungen. Sein Vertrauensbereich errechnet sich aus der Standardabweichung geteilt durch $\sqrt{6}$. Vertrauensbereich und der oben bereits erwähnte systematische Fehler des Messgerätes werden wiederum pythagoräisch zur Gesamtunsicherheit u_{I_R} addiert, so dass der Reststrom zu $I_R = (-1,9 \pm 0,2) \text{ pA}$ bestimmt werden kann. Der tatsächliche Strom ergibt sich dann zu $I = I_{\text{mess}} - I_R$ und sein Fehler zu $u_I = u_{I_{\text{mess}}} + u_{I_R}$. Diese Korrektur spielte aufgrund der Größenordnung von I_R aber nur in den Intensitätsminima eine Rolle.

Um die Theorie zu überprüfen wurden die aufgenommenen Werte einem nicht-linearen Fit unterzogen. Um nicht nur das dominante Maximum 0. Ordnung zu berücksichtigen wurden zuerst die Werte von I logarithmiert und ihr Fehler nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu $u_{\ln(I)} = u_I/I$ angepasst. Sie wurden dann gegenüber $\sin \alpha$ aufgetragen. Nun wurde ein nicht-linearer Fit gemäß Gleichung (9) mit der Funktion $\ln(I) = \ln(f(\alpha))$ durchgeführt, wobei mit $u_{\ln(I)}$ gewichtet wurde. Wenn man mit dem oben ermittelten Wert von λ rechnet bleiben in der Funktion noch drei Parameter: I_0 , x_0 sowie B . Da die Aufgabe lautete, qualitativ zu überprüfen, ob der theoretische Zusammenhang Gültigkeit besitzt, reicht es also aus zu zeigen, dass eine Funktion der Form (9) existiert, welche die gemessenen Werte erklären kann. Es wurden also I_0 und x_0 aus dem Experiment zu $I_0 \approx 1,9 \text{ } \mu\text{A}$ und $x_0 \approx 6 \text{ mm}$ geschätzt und der Parameter B frei gelassen: eine Konvergenz für ein B , das in der Nähe des tatsächlichen Wertes liegt, deutet dann darauf hin, dass die gemessene Verteilung tatsächlich mit dem theoretisch vorhergesagten funktionalen Zusammenhang beschrieben werden kann.

Zum Vergleich wurde B mit Hilfe eines Mikroskops separat zu $B_{\text{mik}} = (210 \pm 10) \text{ } \mu\text{m}$ bestimmt. Die Unsicherheit ergibt sich hier aus dem Fehler der Skale für die abgelesenen 21 Skalenteile von $(21 \cdot 0,00003) \text{ mm}$, und einem Ablesefehler von etwa einem Skalenteil, d.h. $0,01003 \text{ mm}$, die pythagoräisch addiert werden. Der Startwert für den Parameter B wurde dann in OriginPro in dieser Größenordnung gewählt, da die Funktion naturgemäß sehr schnell konvergiert und ein schlecht gewählter Startwert teilweise völlig unbrauchbare Fit-Kurven hervorbrachte. Das Programm lieferte dar-

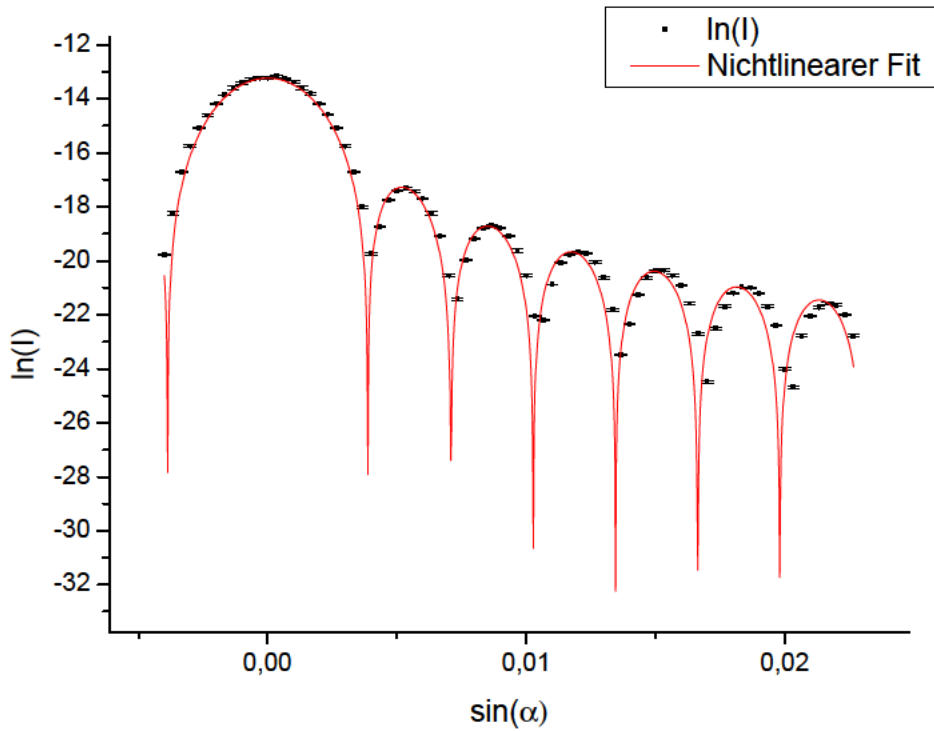


Abbildung 3: Nicht-linearer Fit zur Beugung an der Lochblende

aufhin eine Konvergenz für $B = (201 \pm 1) \mu\text{m}$ bei einem $R^2 = 0,76$ und $\chi^2 = 2231$. Der dazugehörige nicht-lineare Fit ist in Abbildung (3) dargestellt.

Hier deutet das relativ gute R^2 darauf hin, dass die gewählte Kurvenform die gemessene Werteverteilung tatsächlich erklären kann, die Theorie also mit der Messung übereinstimmt. Graphisch wird deutlich, dass die gefittete Kurve immernoch stark vom zentralen Hauptmaximum dominiert wird, die Übereinstimmung in den höheren Ordnungen nimmt ab. Der sehr hohe Wert von χ^2 zeigt außerdem eine drastische Unterschätzung der Unsicherheiten an, die hier angestellte Betrachtung eignet sich in dieser Form also tatsächlich nur für qualitative Aussagen.

6 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Die experimentell bestimmte Laserwellenlänge $\lambda = (636,4 \pm 1,2) \text{ nm}$ schließt den auf dem Gerät angegebenen Wert von $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ weder im Ein- noch im Zwei-Sigma Fehlerintervall ein. Eine mögliche Erklärung für diese - zwar relativ gesehen geringe aber dennoch signifikante - Abweichung könnte in der Geometrie des Schirmes liegen: während des Versuchs wurde deutlich, dass der Schirm zum Laser hin konvex verbogen ist, d.h. der Abstand zwischen Blende und Schirm d ist für die einzelnen Beugungsmaxima nicht konstant sondern nimmt nach außen hin leicht zu.

Weiterhin werden so natürlich auch die x -Werte der Maxima selbst leicht verfälscht und wandern weiter nach außen, als dies auf einem planen Schirm der Fall wäre. Zur Probe wurden also statt der Messwerte für die Auslenkungen der Maxima 2. Ordnung die zweifachen Werte der Maxima 1. Ordnung angenommen (da eine solche Symmetrie eigentlich zu erwarten war), und der Abstand d von Blende zum Schirm nicht als konstant betrachtet, sondern nach außen in Schritten von 0,25 cm von 177 cm auf 177,5 cm zunehmend. Eine Regression mit diesen neuen Daten ergab einen Wert von $\lambda = (630,0 \pm 1,3) \text{ nm}$. Damit wird deutlich, dass die Krümmung des Schirmes das Ergebnis in die Richtung verfälscht, in die auch das Messergebnis vom tatsächlichen Wert abweicht, und auch die Größenordnung des Effektes zur beobachteten Abweichung passt.

Gleichzeitig wird auch klar, dass die von den Experimentatoren anfangs getroffene Annahme, der Abstand d sei für den vorliegenden Versuch nur auf etwa einen Zentimeter genau interessant, in dieser Form vermutlich nicht haltbar ist. Vielmehr sollte bei einer Wiederholung des Versuches mehr Aufwand betrieben werden, um d genauer zu bestimmen und eventuell sogar die Krümmung des Schirmes zu vermessen, um diese Fehlerquellen in Zukunft weitgehend ausschließen zu können.

Die gleiche Problematik betrifft auch die Bestimmung der Spaltbreite b im nächsten Teil des Experiments. Hier wird einerseits mit einer Wellenlänge gerechnet, die wohl leicht zu hoch liegt. Andererseits sind wieder die Auslenkungsmessungen x und die Abstandsmessungen d der Krümmung des Schirmes unterworfen. Da für die Spaltbreite b aber ein zuverlässiger Vergleichswert fehlt, und der tatsächliche Wert der Krümmung nicht bekannt ist, wird hier von einer quantitativen Rechnung zur Bestimmung der so auftretenden Abweichung abgesehen.

Zur Anwendung des nicht-linearen Fits in OriginPro sei angemerkt, dass die Funktion in der angegebenen Form überaus schnell konvergiert. Ohne die ungefähre Kenntnis des tatsächlichen Wertes für B hätte die gewählte Vorgehensweise mit Sicherheit zu keiner brauchbaren Aussage geführt, da erst bei einer geeigneten Wahl für den Startwert von B die Konvergenz auch in die Nähe des tatsächlichen Wertes führte. Die zunehmende Abweichung von theoretischer Kurve und Messwerten in höheren Ordnungen deutet zusätzlich darauf hin, dass trotz der durchgeführten Logarithmierung das Fitting noch stark vom 0. Hauptmaximum dominiert wird und die höheren Ordnungen eventuell zu wenig berücksichtigt wurden. Die Größe des χ^2 -Wertes weist außerdem darauf hin, dass die Unsicherheiten generell stark unterschätzt wurden und quantitative Aussagen in dieser Darstellung kaum möglich sind.

Literatur

- [1] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. 2007.
- [2] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Elektrodynamik und Optik*. 2010.

A Anhang

Das Messdatenprotokoll befindet sich im Anhang des Versuchsprotokolls von Anton Plietzsch.

Tabelle 2: Werte zur Linearen Regression zur Bestimmung von b

k	$1/k$	x [m]	u_x	α_k	$f(k)$ [m]	$\partial_x f$	$\partial_d f$	$\partial_\lambda f$	u_f
-9	-1,11E-01	-0,049	0,001	-2,75E-02	-2,31E-05	4,72E-07	-1,30E-07	-4,39E-08	4,91E-07
-8	-1,25E-01	-0,044	0,001	-2,47E-02	-2,58E-05	5,85E-07	-1,45E-07	-4,89E-08	6,05E-07
-7	-1,43E-01	-0,039	0,001	-2,19E-02	-2,91E-05	7,45E-07	-1,63E-07	-5,52E-08	7,64E-07
-6	-1,67E-01	-0,034	0,001	-1,91E-02	-3,33E-05	9,80E-07	-1,87E-07	-6,33E-08	1,00E-06
-5	-2,00E-01	-0,029	0,001	-1,63E-02	-3,91E-05	1,35E-06	-2,19E-07	-7,42E-08	1,37E-06
-4	-2,50E-01	-0,024	0,001	-1,35E-02	-4,72E-05	1,97E-06	-2,65E-07	-8,96E-08	1,99E-06
-3	-3,33E-01	-0,019	0,001	-1,07E-02	-5,96E-05	3,14E-06	-3,35E-07	-1,13E-07	3,16E-06
-2	-5,00E-01	-0,013	0,001	-7,30E-03	-8,71E-05	6,70E-06	-4,90E-07	-1,65E-07	6,72E-06
-1	-1,00E+00	-0,007	0,001	-3,93E-03	-1,62E-04	2,31E-05	-9,09E-07	-3,07E-07	2,31E-05
1	1,00E+00	0,008	0,001	4,49E-03	1,42E-04	1,77E-05	7,96E-07	2,69E-07	1,77E-05
2	5,00E-01	0,013	0,001	7,30E-03	8,71E-05	6,70E-06	4,90E-07	1,65E-07	6,72E-06
3	3,33E-01	0,017	0,001	9,55E-03	6,66E-05	3,92E-06	3,74E-07	1,27E-07	3,94E-06
4	2,50E-01	0,022	0,001	1,24E-02	5,15E-05	2,34E-06	2,89E-07	9,78E-08	2,36E-06
5	2,00E-01	0,028	0,001	1,57E-02	4,05E-05	1,44E-06	2,27E-07	7,68E-08	1,46E-06
6	1,67E-01	0,032	0,001	1,80E-02	3,54E-05	1,11E-06	1,99E-07	6,72E-08	1,13E-06
7	1,43E-01	0,037	0,001	2,08E-02	3,06E-05	8,27E-07	1,72E-07	5,81E-08	8,47E-07
8	1,25E-01	0,041	0,001	2,30E-02	2,76E-05	6,74E-07	1,55E-07	5,25E-08	6,93E-07
9	1,11E-01	0,046	0,001	2,58E-02	2,46E-05	5,35E-07	1,38E-07	4,68E-08	5,55E-07

Tabelle 3: Werte zur Linearen Regression zur Bestimmung von λ

k	x [m]	u_x	α_k	$f(k)$ [m]	$\partial_x f$	$\partial_d f$	u_f
-2	-2,27E-01	1,00E-03	-1,28E-01	-1,27E-06	5,51E-09	7,07E-09	8,97E-09
-1	-1,13E-01	1,00E-03	-6,38E-02	-6,37E-07	5,62E-09	3,58E-09	6,66E-09
0	0,00E+00	1,00E-03	0,00E+00	0,00E+00	5,65E-09	0,00E+00	5,65E-09
1	1,12E-01	1,00E-03	6,32E-02	6,32E-07	5,62E-09	-3,55E-09	6,65E-09
2	2,28E-01	1,00E-03	1,28E-01	1,28E-06	5,51E-09	-7,10E-09	8,99E-09